ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ TRUNG HIẾU

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN SUY RỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trần Xuân Quý
TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Bảng ký hiệu

X	không gian Banach
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\forall x$	với mọi x
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$C[a,b]$	tập các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
L_p	tập hợp các hàm khả tích cấp p
l^p	tập hợp các dãy khả tổng cấp p

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ đã và đang là một chủ đề thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Một trong những hướng nghiên cứu về bài toán điểm bất động là xây dựng phương pháp tìm (xấp xỉ) điểm bất động của ánh xạ trong không gian Hilbert hoặc không gian Banach. Nhiều bài toán liên quan tới phương pháp xấp xỉ này đã được đặt ra và giải quyết cho từng lớp ánh xạ chẳng hạn như ánh xạ co, ánh xạ không giãn,. . . Với luận văn tốt nghiệp thạc sĩ, em lựa chọn một phần trong bài toán xấp xỉ nghiệm cho các ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Xuân Quý và TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh, em chọn đề tài luận văn: "Một số định lý điểm bất động của ánh xạ không giãn suy rộng".

Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương, cụ thể như sau:

Chương 1: Trình bày về một số kết quả đặc trưng trong không gian Banach - Bài toán tìm điểm bất động.

Chương 2: Trình bày về định lý điểm bất động của ánh xạ không giãn suy rộng.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán –Tin. Với bản luận văn này, em mong muốn được góp một phần nhỏ công sức của mình vào việc gìn giữ và phát huy vẻ đẹp, sự hấp dẫn cho những định lý toán học vốn dĩ đã rất đẹp. Đây cũng là một cơ hội cho em gửi lời tri ân tới tập thể các thầy cô giảng viên của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên nói chung và Khoa Toán – Tin nói riêng, đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức khoa học quý báu trong thời gian em được là học viên của trường. Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường THPT Dương Quảng Hàm, Hưng Yên cùng toàn thể các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học; cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học Toán K12 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới giáo viên hướng dẫn, TS. Trần Xuân Quý và TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh đã luôn quan tâm ân cần chỉ bảo, động viên khích lệ, giúp đỡ tận tình và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài. Chặng đường vừa qua sẽ là những kỉ niệm đáng nhớ và đầy ý nghĩa đối với các anh chị em học viên lớp K12 nói chung và với bản thân em nói riêng. Dấu ấn ấy hiển nhiên không thể thiếu sự hỗ trợ, sẻ chia đầy yêu thương của cha mẹ hai bên và các anh chị em con cháu trong gia đình. Xin chân thành cảm ơn tất cả những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 06 năm 2020

Tác giả luận văn

Đỗ Trung Hiếu

Chương 1

Một số kết quả đặc trưng trong không gian Banach - Bài toán tìm điểm bất động

Chương này trình bày một số tính chất hình học không gian Banach và bài toán điểm bất động trong không gian Banach. Kiến thức của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2] và [5].

1.1 Một số kết quả đặc trưng trong không gian Banach

1.1.1 Không gian Banach lồi đều

Xét X là không gian Banach và $x_0 \in X$ cho trước, xét $S_r(x_0)$ mặt cầu tâm x_0 bán kính $r > 0$, nghĩa là,

$$S_r(x_0) := \{x \in X : ||x - x_0|| = r\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. Không gian Banach X được gọi là lồi đều nếu $\epsilon \in (0, 2]$ bất kỳ, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho nếu $x, y \in X$ với $||x|| = 1, ||y|| = 1$ và $||x - y|| \geqslant \epsilon$, thì $\left|\left|\frac{1}{2}(x + y)\right|\right| \leqslant 1 - \delta$.

Từ định nghĩa ta thấy: không gian Banach X là lồi đều nếu bất kỳ $\epsilon \in (0, 2]$ tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho nếu $x, y \in X$ với $||x|| \leqslant 1, ||y|| \leqslant 1$ và $||x - y|| \geqslant \epsilon$, thì $\left|\left|\frac{1}{2}(x + y)\right|\right| \leqslant 1 - \delta$.

Kết quả dưới đây là một ví dụ về không gian lồi đều.

Định lý 1.1.2. *Không gian L_p với $1 < p < \infty$ là không gian Banach lồi đều.*

Định lý 1.1.3. *Giả sử X là không gian Banach lồi đều. Khi đó với bất kỳ $d > 0$, $\epsilon > 0$ và các vecto tùy ý $x, y \in X$ với $||x|| \leqslant d$, $||y|| \leqslant d$, $||x - y|| \geqslant \epsilon$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho*

$$\left|\left|\frac{1}{2}(x+y)\right|\right| \leqslant \left[1 - \delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right)\right]d.$$

Chứng minh. Với bất kỳ $x, y \in X$, xét $z_1 = \dfrac{x}{d}, z_2 = \dfrac{y}{d}$, và tập $\bar{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{d}$. Hiển nhiên $\bar{\epsilon} > 0$, hơn nữa $||z_1|| \leqslant 1, ||z_2|| \leqslant 1$ và $||z_1 - z_2|| = \dfrac{1}{d}\,||x - y|| \geqslant \dfrac{\epsilon}{d} = \bar{\epsilon}$. Từ tính lồi đều của X, tồn tại $\delta = \delta\left(\dfrac{\epsilon}{d}\right) > 0$,

$$\left|\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right|\right| \leqslant 1 - \delta(\bar{\epsilon}),$$

nghĩa là

$$\left|\left|\frac{1}{2d}(x+y)\right|\right| \leqslant 1 - \delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right),$$

suy ra

$$\left|\left|\frac{1}{2}(x+y)\right|\right| \leqslant \left[1 - \delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right)\right]d.$$

Ta có điều phải chứng minh □

Mệnh đề 1.1.4. *Cho X là không gian Banach lồi đều và giả sử $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$. Khi đó với bất kỳ $d > 0$, nếu $x, y \in X$ thỏa mãn $||x|| \leqslant d, ||y|| \leqslant d, ||x - y|| \geqslant \epsilon$, thì tồn tại $\delta = \delta\left(\dfrac{\epsilon}{d}\right) > 0$ sao cho*

$$||\alpha x + (1-\alpha)y|| \leqslant \left[1 - 2\delta\left(\frac{\epsilon}{d}\right)\min\{\alpha, 1-\alpha\}\right]d.$$

Mối liên hệ giữ tính lồi đều và tính phản xạ của không gian Banach X được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 1.1.5. *Nếu X là không gian Banach lồi đều thì X là không gian phản xạ.*

Chứng minh. Giả sử X là không gian Banach lồi đều, ta cần chứng minh X là không gian Banach phản xạ. Giả sử $S_{X^*} := \{j \in X^* : \|j\| = 1\}$ là hình cầu đơn vị trong X^* và $f \in S_{X^*}$.

Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy trong S_X sao cho $\langle x_n, f\rangle \to 1$. Ta sẽ chỉ ra $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

Giả sử $\{x_n\}$ không là dãy Cauchy, khi đó tồn tại $\epsilon > 0$ và dãy con $\{x_{n_i}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

$$\|x_{n_i} - x_{n_j}\| \geqslant \epsilon,\ \forall i \neq j.$$

Theo giả thiết, X là không gian lồi đều, nên $\exists\delta(\epsilon) > 0$ sao cho

$$\Big\|\frac{x_{n_i} + x_{n_j}}{2}\Big\| < 1 - \delta.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle\frac{x_{n_i} + x_{n_j}}{2}, f\Big\rangle\Big| &\leqslant \|f\|\Big\|\frac{x_{n_i} + x_{n_j}}{2}\Big\| \\ &< \|f\|(1-\delta) = 1 - \delta,\end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với $f(x_n) \to 1$. Vì vậy, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và tồn tại $x \in X$ sao cho $x_n \to x$. Rõ ràng $x \in S_X$ và từ tính liên tục của chuẩn ta có $\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 1$. Do đó, từ $\langle x_n, f\rangle \to 1$, cho $n \to \infty$, ta nhận được $\langle x, f\rangle = 1$. Theo Định lý James[1], suy ra X là không gian phản xạ. □

Định nghĩa 1.1.6. Không gian Banach X được gọi là *lồi đều theo hướng tại $z \in X$ khác không,* nếu mọi ε với $0 < \varepsilon \leq 2$

$$\begin{aligned}\delta_z(\varepsilon) = \inf\Big\{1 - \|\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}\| : &\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon, \\ &x - y = \lambda z, \lambda > 0\Big\} > 0.\end{aligned}$$

Ta nói rằng X *lồi đều theo mọi hướng (UCED),* nếu $\delta_z(\varepsilon) > 0$ với mọi $z \in X\backslash\{0\}$.

Chú ý 1.1.7. Mọi không gian Banach lồi đều thì lồi đều theo mọi hướng. Điều ngược lại chưa hẳn đúng [13].

[1]Không gian Banach E là phản xạ khi và chỉ khi với mỗi $j \in S_{X^*}$, tồn tại $x \in S_X$ sao cho $\langle x, j\rangle = 1$.

Định nghĩa 1.1.8. Không gian Banach X được xem là có *tính chất Kadec-Klee (KK),* nếu $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ thuộc X thỏa mãn $\|x_n\| \to \|x\|$ và $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $x \in X$, thì $\{x_n\}$ hội tụ tới x.

Ví dụ 1.1.9. Mọi không gian Hilbert H đều có tính chất Kadec-Klee.

Thật vậy, giả sử $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong H thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\ &= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \\ &\to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Do đó $x_n \to x$.

Định lý 1.1.10. *Mọi không gian Banach lồi đều có tính chất Kadec-Klee.*

Chứng minh. Giả sử X là một không gian Banach lồi đều và $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong X thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$.

Nếu $x = 0$, thì hiển nhiên $x_n \to 0$. Giả sử $x \neq 0$ và $x_n \nrightarrow x$. Khi đó, ta có $\dfrac{x_n}{\|x_n\|} \nrightarrow \dfrac{x}{\|x\|}$. Do đó, tồn tại $\epsilon > 0$ và dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

$$\left\|\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| \geqslant \epsilon,$$

với mọi $k \geq 1$. Vì X là không gian lồi đều nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Từ $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \to \|x\|$ ta có $\dfrac{x_n}{\|x_n\|} \rightharpoonup \dfrac{x}{\|x\|}$. Suy ra

$$1 = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left\|\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant 1 - \delta,$$

suy ra mâu thuẫn. Vậy $x_n \to x$ hay X có tính chất Kadec-Klee. $\square$

1.1.2 Không gian Banach lồi chặt

Định nghĩa 1.1.11. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in X$, $x \neq y, ||x|| = ||y|| = 1$, ta có $||\lambda x + (1-\lambda)y|| < 1 \ \forall \lambda \in (0,1)$.

Nhận xét 1.1.12. Định nghĩa 1.1.11 tương đương với phát biểu sau: Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in X$ thỏa mãn $x \neq y$, $||x|| = ||y|| = 1$, ta đều có $||(x+y)/2|| < 1$.

Định lý 1.1.13. *Mọi không gian Banach lồi đều là không gian lồi chặt.*

Định lý 1.1.13 chỉ ra một lớp không gian lồi chặt. Tuy nhiên, không phải mọi không gian Banach đều lồi chặt. Dưới đây là một vài ví dụ về không gian Banach là lồi chặt nhưng không lồi đều.

Ví dụ 1.1.14. Cho trước $\mu > 0$ và xét $C[0,1]$ với chuẩn $||.||_\mu$ xác định như sau,

$$||x||_\mu := ||x||_0 + \mu \left(\int_0^1 x^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

với $||x||_0 = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ với mọi $x \in C[0,1]$. Khi đó $(C[0,1], ||.||_\mu)$ là không gian lồi chặt nhưng không lồi đều.

Ví dụ 1.1.15. Xét μ_0 và $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ với chuẩn $||.||_\mu$ xác định với $x = \{x_n\} \in c_0$ như sau

$$||x||_\mu := ||x||_{c_0} + \mu \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i}{i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

trong đó $||.||_{c_0}$ là chuẩn thông thường. Như trong ví dụ trên, $(c_0, ||.||_\mu)$ với $\mu > 0$ lồi chặt nhưng không lồi đều.

Ví dụ 1.1.16. Không gian l_1 không lồi chặt. Thật vậy, chọn $x = (1,0,0,0,...)$, $y = (0,-1,0,0,0,...)$. Khi đó $x, y \in l_1$, $x \neq y$ và $||x||_{l_1} = 1 = ||y||_{l_1}$. Tuy nhiên $\|(x+y)/2\| = 1$. Suy l_1 không lồi chặt.

Ví dụ 1.1.17. Không gian l_∞ không lồi chặt.

Thật vậy, xét $x = (1,1,0,0,0,...)$ và $y = (-1,1,0,0,0,...)$. Khi đó $x, y \in l_\infty$, $x \neq y$ và $||x||_\infty = 1 = ||y||_\infty$. Tuy nhiên $\|(x+y)/2\| = 1$. Do đó l_∞ không lồi chặt.